

Problème 007 – The Wall – Corrigé

1) Posons p_A, p_B, p_C les probabilités respectives que la boule tombe dans la zone A, B et C

On a $p_B = 3p_A$ et $p_C = 4p_A$

Or on a $p_A + p_B + p_C = 1$

Donc $p_A + 3p_A + 4p_A = 1$

Ou encore $8p_A = 1$

Donc $p_A = \frac{1}{8}$, puis $p_B = 3p_A = \frac{3}{8}$ et $p_C = 4p_A = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

2) On va noter p_k la probabilité de la k – ème case en partant de gauche

Les probabilités des 5 cases de chaque zone sont égales, donc elles se répartissent de manière équiprobable

$$\begin{aligned} \text{D'où } p_1 &= p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{p_A}{5} \\ p_6 &= p_7 = p_8 = p_9 = p_{10} = \frac{p_B}{5} \\ p_{11} &= p_{12} = p_{13} = p_{14} = p_{15} = \frac{p_C}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } p_1 &= p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{8 \times 5} = \frac{1}{40} \\ p_6 &= p_7 = p_8 = p_9 = p_{10} = \frac{3}{8 \times 5} = \frac{3}{40} \\ p_{11} &= p_{12} = p_{13} = p_{14} = p_{15} = \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

3) On voit que X peut prendre les valeurs suivantes : 1, 10, 100, 5000, 10000, 20000, 30000, 40000, 50000, 150000

Il suffit pour chaque valeur de sommer les probabilités des cases relatives à chaque valeurs

$$\text{Donc } p(X = 1) = p_1 + p_7 + p_9 + p_{15} = \frac{1}{40} + \frac{3}{40} + \frac{3}{40} + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$$

$$p(X = 10) = p_5 + p_{11} = \frac{1}{40} + \frac{1}{10} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$p(X = 100) = p_3 + p_{13} = \frac{1}{40} + \frac{1}{10} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$p(X = 5000) = p_2 = \frac{1}{40}$$

$$p(X = 10000) = p_4 = \frac{1}{40}$$

$$p(X = 20000) = p_6 = \frac{3}{40}$$

$$p(X = 30000) = p_8 = \frac{3}{40}$$

$$p(X = 40000) = p_{10} = \frac{3}{40}$$

$$p(X = 50000) = p_{12} = \frac{1}{10}$$

$$p(X = 150000) = p_{14} = \frac{1}{10}$$

4) On a la formule de l'espérance : $E(X) = \sum_k p(X = i_k) \times i_k$, les i_k étant les sommes possibles et $p(X = i_k)$ leurs probabilités respectives

$$\text{D'où } E(X) = \frac{11}{10} \times 1 + \frac{1}{8} \times 10 + \frac{1}{40} \times 100 + \frac{1}{40} \times 5000 + \frac{1}{40} \times 10000 + \frac{3}{40} \times 20000 + \frac{3}{40} \times 30000 + \frac{3}{10} \times 40000 + \frac{1}{10} \times 50000 + \frac{1}{10} \times 150000$$

$$E(X) = 27139,05$$

5) Avec un facteur λ , seuls les montants des cases 50000 et 10000 vont changer, mais les probabilités ne changent pas

On veut $E(X) > 50000$

$$\text{D'où } \frac{11}{10} \times 1 + \frac{1}{8} \times 10 + \frac{1}{40} \times 100 + \frac{1}{40} \times 5000 + \frac{1}{40} \times 10000 + \frac{3}{40} \times 20000 + \frac{3}{40} \times 30000 + \frac{3}{10} \times 40000 + \frac{1}{10} \times 50000 \times \lambda + \frac{1}{10} \times 150000 \times \lambda > 50000$$

La calcul nous donne $7139,025 + 20000 \times \lambda > 50000$

Ou encore $20000 \times \lambda > 42860,975$

D'où $\lambda > 2,14$

*